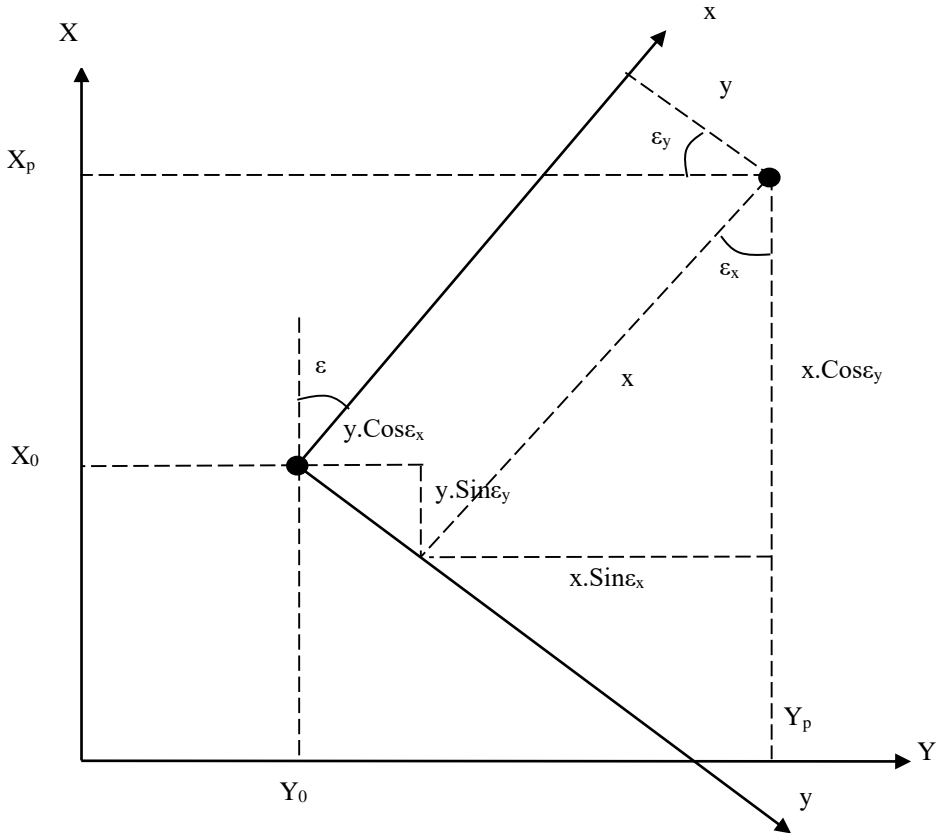


## İki Boyutlu Afin Dönüşümü

İki boyutlu afin dönüşümü iki boyutlu dik koordinat sistemleri arasındaki ilişkiyi ifade eder. Burada koordinat eksenlerinin dik ve her iki ekseninde de farklı dönüklük ve farklı ölçek faktörü olduğu kabul edilir. Afin dönüşümünde; doğrudaşlık, paralellik özellikleri korunur, açılar ve dolayısıyla şekil değişir, yöne bağlı olarak ölçek değişir. Bir doğru üzerindeki doğru parçalarının karşılıklı oranları sabit kalır. Film, kağıt ve benzeri maddeler üzerindeki çizimler üzerinden alınan koordinatların dönüşümünde kullanılan bir yöntemdir.

Afin dönüşümünde 2 ölçek ( $k_x, k_y$ ), 2 dönüklük ( $\epsilon_x, \epsilon_y$ ), ve 2 öteleme ( $X_0, Y_0$ ) olmak üzere toplam 6 bağımsız parametre vardır. Dönüşümün tek anlamlı olması için iki sistemde de koordinatı bilinen iki ortak nokta gereklidir. İki den fazla ortak nokta mevcutsa dönüşüm parametreleri en küçük kareler yöntemi ile dengeleme hesabı yapılır ve nokta sayısının iki katı kadar düzeltme denklemleri yazılabilir.



Şekil : Afin dönüşümü

Bu şekilde bir noktanın koordinatı benzerlik dönüşümü için;

$$\begin{aligned}X_i &= X_0 + x_i * \text{Cos}\varepsilon_y - y_i * \text{Sin}\varepsilon_y \\Y_i &= Y_0 + x_i * \text{Sin}\varepsilon_x + y_i * \text{Cos}\varepsilon_x\end{aligned}$$

eşitliğiyle hesaplanır. Ölçek katsayısı ölçümler arasındaki oransal fark olduğundan ötele parametrelerini etkilemez. Bu nedenle eşitliklerin öteleme harici kısımlarına eklenmelidir.

$$\begin{aligned}X_i &= X_0 + k_x * (x_i * \text{Cos}\varepsilon_y - y_i * \text{Sin}\varepsilon_y) = X_0 + k_x * x_i * \text{Cos}\varepsilon_y - k_x * y_i * \text{Sin}\varepsilon_y \\Y_i &= Y_0 + k_y * (x_i * \text{Sin}\varepsilon_x + y_i * \text{Cos}\varepsilon_x) = Y_0 + k_y * x_i * \text{Sin}\varepsilon_x + k_y * y_i * \text{Cos}\varepsilon_x\end{aligned}$$

Bu eşitlikte  $a = k_x * \text{Cos}\varepsilon_y$ ;  $b = -k_x * \text{Sin}\varepsilon_y$ ;  $c = X_0$ ;  $d = k_y * \text{Sin}\varepsilon_x$ ;  $e = k_y * \text{Cos}\varepsilon_x$ ;  $f = Y_0$  olarak alınırsa

$$\begin{aligned}X_i &= c + a * x_i + b * y_i \\Y_i &= f + d * x_i + e * y_i\end{aligned} \quad (1)$$

eşitliği bulunur. Burada,  $(x_i, y_i)$ ,  $(X_i, Y_i)$ ,  $k_x; k_y$ ,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  ve  $a, b, c, d, e, f$  sırasıyla 1. ve 2. koordinat sisteminde koordinatlar, ölçek faktörleri, koordinat eksenindeki dönüklükler ve dönüşüm parametreleridir.

n tane ortak nokta için yazılacak düzeltme denklemleri;

$$\begin{aligned}X_1 + Vx_1 &= ax_1 + by_1 + c \\Y_1 + Vy_1 &= dx_1 + ey_1 + f \\X_2 + Vx_2 &= ax_2 + by_2 + c \\Y_2 + Vy_2 &= dx_2 + ey_2 + f \\&\dots\dots\dots \\X_n + Vx_n &= ax_n + by_n + c \\Y_n + Vy_n &= dx_n + ey_n + f\end{aligned}$$

Yazılır ve düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
Vx_1 &= ax_1 - by_1 + c - X_1 \\
Vy_1 &= bx_1 + ay_1 + d - Y_1 \\
Vx_2 &= ax_2 - by_2 + c - X_2 \\
Vy_2 &= bx_2 + ay_2 + d - Y_2 \\
&\dots\dots \\
Vx_n &= ax_n - by_n + c - X_n \\
Vy_n &= bx_n + ay_n + d - Y_n
\end{aligned}$$

Elde edilir. Bu eşitlik

$$\begin{bmatrix} Vx_1 \\ Vy_1 \\ \dots \\ \dots \\ Vx_n \\ Vy_n \end{bmatrix}_{2nx1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & x_1 & y_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}_{2nx6} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}_{6x1} - \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \dots \\ \dots \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix}_{2nx1}$$

$$V = A.x - \ell$$

şeklinde düzenlenir ve En Küçük Kareler yöntemine göre dengeleme işlemine devam edilir. Yapılan çözümden x bilinmeyenleri yani dönüşüm katsayıları;

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P \ell = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

hesaplanmış olur. Bu dönüşüm katsayıları kullanılarak sadece 1. Koordinat sisteminde koordinatı bilinen noktaların koordinatları (x,y) eşitlik (1) kullanılarak 2. Koordinat sistemine (X,Y) dönüştürülebilir.